

Le Théorème d'Arrow

A la recherche d'une fonction de choix social

Problématique:

Classer les états de la société en se basant sur les préférences individuelles.

→ exigence de - rationalité individuelle
- rationalité collective

D'un point de vue mathématique, on modélise les préférences de agents par une relation d'ordre. On cherche donc une relation fonctionnelle entre les relations d'ordre des agents et une relation d'ordre 'sociale' qui vérifie plusieurs propriétés...

$$(r^1, \dots, r^i, \dots, r^N) \xrightarrow{F} R = F(r^1, \dots, r^i, \dots, r^N)$$

[Passer à la première page](#)



1ère condition supplémentaire: Anonymat

Le classement des états possibles de la société ne dépend pas de qui émet les préférences.

$F(r^1, \dots, r^i, \dots, r^N)$ est invariante par permutation.

2ème condition: Universalité

La constitution doit être valable pour tout groupe d'agent

(Pas de restrictions *a priori* sur les préférences individuelles des agents)

Le domaine de définition de F est l'ensemble des relations d'ordre.

[Passer à la première page](#)



3ème condition: Principe de **Pareto**

Lorsqu'un état social est préféré à un autre par tous les agents, il est considéré comme socialement préférable

('Non-Masochisme' du groupe)

$$\{\forall i \in P, x r^i y\} \Rightarrow x R y$$

4ème condition: Indépendance

(des alternatives non-pertinentes)

Si les préférences des agents changent, sauf en ce qui concerne deux situations, alors, d'un point de vue social, ces situations sont toujours évaluées de la même manière

$$x R y \Rightarrow x R' y$$

(Pour éviter la 'manipulation')

[Passer à la première page](#)



5ème condition: Pas de dictateur

Personne ne peut imposer son point de vue, si tous les autres sont d'avis contraire.

$$\nexists i \in P, \forall (x, y) \quad x r^i y, y r^{j \neq i} x \text{ et } x R y.$$

NB: Groupe décisif:

Un groupe g est dit décisif pour le choix entre x et y si: $x P y$ pour toute distribution des préférences telle que les membres du groupe g préfèrent x à y et les autres y à x.

Dictateur: individu décisif pour toute paire d'alternative

[Passer à la première page](#)



Le Théorème d'impossibilité d'Arrow (1951)

Théorème:

S'il existe plus de deux alternatives, toute fonction de choix social qui satisfait les hypothèses de rationalité ainsi que les conditions 2, 3, 4 ne vérifie pas la condition 5.

[Passer à la première page](#)



Démonstration du théorème d'Arrow

Etape 1:

Si $x P y$, pour une distribution de préférence (r^1, \dots, r^N) pour laquelle l'individu i préfère x à y alors que tous les autres préfèrent y à x, alors $x P y$ pour toute distribution de préférences (r^1, \dots, r^N) pour laquelle i préfère x à y et tous les autres préfèrent y à x.

C'est une conséquence directe de l'axiome d'indépendance A4 puisque les préférences concernant x et y restent inchangées.

[Passer à la première page](#)



